全変動流型方程式

儀我　美一　(東京大学)*

1. はじめに

画像処理、結晶成長現象を記述するためにしばしば用いられる全変動流型方程式について、その数学解析の進展について述べる。

1.1. 全変動流方程式の特徴

全変動流方程式は、狭義には全変動エネルギーの L^2 勾配流を表す偏微分方程式のことを指すことが多い。式で書くと

$$u_t - \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|) = 0$$

となる。スカラー関数 u の時間微分 u_t が、**全変動エネルギー**

$$E_1(u) = \int_\Omega |\nabla u| \mathrm{d}x$$

の L^2 勾配 $(\delta/\delta u)E_1(u)$ のマイナスに等しいことを表している。ここで Ω は N 次元の領域を表している。∇u は u の勾配、すなわち $\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_N u)$, $(\partial/\partial x_j)u = \partial_j u$ を表し、$\operatorname{div} X$ はベクトル場 $X = (X^1, \ldots, X^N)$ の発散を表す。また $q \in \mathbf{R}^N$ に対して $|q|$ はユークリッドノルムを表している。一般に $1 \le p < \infty$ に対して p -ディリクレエネルギー

$$E_p(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x$$

を考えると、その L^2 勾配 $(\delta/\delta u)E_p$ はいわゆる E_p のオイラー・ラグランジェ作用素である。実際、

$$\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_p(u + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x$$

がすべての $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$（台コンパクトな滑らかな関数全体）で成り立つため

$$\langle (\delta/\delta u)E_p, \varphi \rangle_{L^2} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x$$

となる。φ は任意なので、部分積分により形式的には

$$(\delta/\delta u)E_p(u) = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right)$$

日本数学会：2019 年度年会（於：東京工業大学）実函数論分科会・特別講演, 実函数論分科会アブストラクト集掲載原稿
本研究は科研費 基盤研究 (S) (課題番号: 26220702)、挑戦的研究 (開拓) (課題番号: 18H05323) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 35K69, 49L25
キーワード：全変動流方程式, ファセット, 粘性解, 有限時間消滅
*〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: `labgiga@ms.u-tokyo.ac.jp`
web: `http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~labgiga/`

を得る。ここで L^2 内積を

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}x$$

で定義した。E_p の L^2 勾配流 $u_t = -(\delta/\delta u)E_p(u)$ は

$$u_t - \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0$$

となる。$p = 2$ のときは熱伝導方程式にほかならない。$p = 1$ のときが、全変動流方程式になる。方程式は大雑把には拡散型であり消散型であるが、p によってその性格が大きく異なる。

まず $p > 2$ のときは $|\nabla u|^{p-2}$ の部分を熱伝導係数とみると $\nabla u = 0$ のところで退化している。つまりゼロになっている。これに対し、$1 < p < 2$ では、それは $\nabla u = 0$ のところで無限大になっている。拡散が特異となっているといえる。$p = 1$ の場合もそうであるが、$p = 1$ の場合はさらに ∇u の方向に拡散は退化している。いいかえると u の等高面に垂直な方向には拡散効果はない。

全変動流方程式の場合、拡散の特異性が強く、実は u_t が u の微分のような局所的な量で定まらず、いわゆる偏微分方程式ではない。そのことをみるために1次元の問題

$$u_t - \partial_x(\mathrm{sgn}\, u_x) = 0$$

を考える。$\mathrm{sgn}\,\sigma$ は $\sigma > 0$ で 1、$\sigma < 0$ で -1 をとる符号関数とする。形式的にはディラックのデルタ関数を用いて

$$u_t - 2\delta(u_x)u_{xx} = 0$$

となり、傾きがゼロのところで拡散係数は大きく、傾きがゼロでないところでは拡散係数がゼロであることがわかる。しかし、測度の引き戻しである $\delta(u_x)$ は超関数としても定義できない。例えば、図1のような $u = u(x,t)$ はどのように動くのが自然であろうか。仮に平らな部分（ファセット）が曲がったり分裂したりしないとすると（ファセット

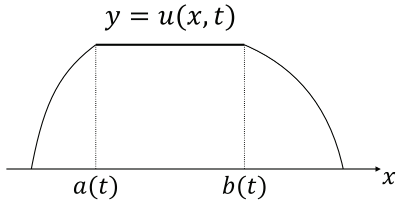

図1

維持の仮定)、u_t は区間 $((a(t), b(t))$ で一定になる。方程式の両辺を $((a(t)-\varepsilon, b(t)+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ で積分すると

$$\int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} u_t \mathrm{d}x = \int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} (\mathrm{sgn}\, u_x)_x \mathrm{d}x$$

を得る。ここで $\varepsilon \downarrow 0$ とすると

$$u_t(b-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} (\mathrm{sgn}\, u_x(b+\varepsilon, t) - \mathrm{sgn}\, u_x(a-\varepsilon, t)) = -1 - (+1) = -2$$

つまり $u_t = -2/$ファセット長 となり、速度は非局所的な量となっている。この原因はエネルギー E_1 の密度が $q = \nabla u$ に対して $q \mapsto |q|$ という関数であり、凸ではあるが原点で微分不能であることによる。他の p -ディリクレエネルギーの勾配流と大きく異なる点である。この全変動流方程式の解が、より滑らかな問題（例えば $|q|$ を $(|q|^2+\delta)^{1/2}$ で近似した問題）の解で近似して得られるとすると、$N \geq 2$ ではファセットは必ずしも維持されず「ファセット維持の仮定」は $N=1$ の場合を除いて一般には不自然である。解をどう定義するかは次節で述べる。

1.2. 全変動流型方程式の例

一般にエネルギー密度が凸ではあるが微分不能であるエネルギーの何らかの変分を含む方程式を、全変動流型方程式ととりあえず呼ぶことにする。このような方程式の例をいくつか挙げる。結晶成長分野では、特異な表面エネルギーの変分が現れる問題が典型的である*。いわゆるラフニング温度より低い場合の現象に対応している。

その中には結晶表面を高さ関数 u で表した

$$u_t - \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,\mathrm{div}\,(\nabla u/|\nabla u|) = 0$$

や、さらに表面エネルギーを一般化した**クリスタライン平均曲率流方程式**がある。この方程式の特徴は $u_t = \mathrm{div}(\nabla u$の関数$)$ とは書けず、非発散型である。また H. Spohn (1993) により提唱されたように、結晶表面のファセットを伴う緩和過程を現すモデルとして**4階の全変動流方程式**

$$u_t + \Delta\,(\mathrm{div}\,(\nabla u/|\nabla u|)) = 0$$

や、その一般化である

$$u_t + \Delta\,\mathrm{div}\,\left(\nabla u/|\nabla u| + a|\nabla u|^{r-2}\nabla u\right) = 0 \quad a \geq 0, \quad r > 1$$

がある。これらは 4 階ではあるが、冒頭の全変動流方程式と同様に発散型である。実際、前者は負指数のソボレフ空間 H^{-1} での全変動エネルギーの勾配流とみなせる。

全変動流方程式は画像からノイズを除くために L. Rudin, S. Osher, E. Fatemi (1992) により提唱されている。この場合 u は濃淡関数（グレイレベル）であり、初期値は元画像、t はスケールパラメータである。画像処理分野では色調からノイズを取り除く方程式として、全変動写像流方程式（1 調和写像流）も B. Tang, G. Sapiro, V. Caselles (2000) により提唱されている。それはベクトル値の全変動流であるが、値が $\mathbf{R}^m$ の中の多様体 M（この場合は $\mathbf{R}^3$ 内の単位球面）に束縛されている。方程式は

$$u_t - \mathrm{div}\,(\nabla u/|\nabla u|) - |\nabla u|u = 0$$

となる。ただし $u : \Omega \to S^2 \subset \mathbf{R}^3$ である。同じ方程式をエネルギー E_p で考えると

$$u_t - \mathrm{div}\,\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) - |\nabla u|^p u = 0$$

となり、$p = 2$ のときは球面値の調和写像流としてよく研究されている。

再び結晶成長分野に戻るが、小林-ワレン-カーターモデル（KWC モデル）が相分離の問題で用いられることがある。この方程式はオーダーパラメータとの連立であるが、その根幹部分は全変動写像流方程式で束縛多様体 M は回転群 $SO(3)$ となっている。

---

*結晶表面が曲線とみなせる問題の数学解析の入門書として、例えば矢崎成俊, 界面現象と曲線の微積分, 共立出版 (2016) が挙げられる。

2. ファセットとその速度

全変動流型方程式では、まずその解の定義から問題になる。凸汎関数である全変動エネルギーの勾配流とみなせる方程式については、極大単調作用素論を用いる方法が有効である。この理論は、高村幸男 Y. Kōmura (1967) により創設され、H. Brezis (1973) らによって大きく発展した抽象論である。H を内積を $\langle\ ,\ \rangle_H$ とする実ヒルベルト空間とし、$\mathcal{E}: H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ を凸関数で下半連続とし、$\mathcal{E}$ が恒等的に無限大にはなっていないとする。$D(\mathcal{E})$ を $\mathcal{E}(u)$ が有限となる u 全体とし、$\mathcal{E}$ の定義域という。また、微分の代用として劣微分

$$\partial\mathcal{E}(u) = \{f \in H \mid \mathcal{E}(u+v) - \mathcal{E}(v) \geq \langle v, f\rangle_H \text{がすべての}\, v \in H\,\text{で成立}\}$$

を定義する。$\partial\mathcal{E}(u)$ は凸閉集合で、1点とは限らない。例えば、$H = \mathbf{R}$ とし、$\mathcal{E}(x) = |x|$ とすると $\partial\mathcal{E}(0) = [-1, 1]$ となる。$\partial\mathcal{E}(u)$ の中で原点に最も近い元を、$\partial\mathcal{E}(u)$ の標準制限（または最小断面）といい $(\partial^\circ\mathcal{E})(u)$ で表す。すなわち

$$\partial^\circ\mathcal{E}(u) := \operatorname{argmin}\{\|f\|_H \mid f \in \partial\mathcal{E}(u)\}.$$

$\partial\mathcal{E}(u)$ が空でなければ、この元はただ一つ定まる。勾配流は $u_t \in -\partial\mathcal{E}(u)$ とみなす。この方程式についての Y. Kōmura (1967) に始まる代表的な結果は次のとおりである。

命題 1. 初期値 $u_0 \in \overline{D(\mathcal{E})}$ に対して方程式 $u_t \in -\partial\mathcal{E}(u)$ をほとんど至るところの $t > 0$ で満たし $u(0) = u_0$ となる解 $u \in C([0,\infty), H) \cap \operatorname{Lip}([\delta,\infty), H)$ $({}^\forall\delta > 0)$ がただ一つ存在する。さらに u は $t > 0$ で右微分可能で $\mathrm{d}^+u/\mathrm{d}t = -\partial^\circ\mathcal{E}(u)$ $(t > 0)$.

この結果のおもしろいところは、方程式に一見曖昧さがあるが、解がただ一つ決まるところである。全変動流方程式を周期境界条件で考えよう。すなわち、平らなトーラス $\mathbf{T}^N = \prod_{j=1}^N (\mathbf{R}/\omega_j\mathbf{Z})$ $(\omega_j > 0)$ 上での関数空間で考える。$H = L^2(\mathbf{T}^N)$ とし、

$$E(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbf{T}^N} |\nabla u|, & u \in BV \cap H \\ \infty, & u \in H \backslash BV \end{cases}$$

と置くと、E は $L^2(\mathbf{T}^N)$ で下半連続となる。ここで $BV = BV(\mathbf{T}^N)$ は有界変動関数全体で $\int_{\mathbf{T}^N} |\nabla u|$ は ∇u の全変動を表す。すなわち

$$\int_{\mathbf{T}^N} |\nabla u| = \sup\left\{\int_{\mathbf{T}^N} u \operatorname{div}\varphi \mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in \left(C^\infty(\mathbf{T}^N)\right)^N, \|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{T}^N} |\varphi(x)| \leq 1\right\}.$$

E の定義域をいわゆる $W^{1,1}(\cap H)$ としてしまうと、下半連続にはならないことに注意する。この E を改めて**全変動エネルギー**と呼ぶ。E の凸性は明らかなので命題1が適用できて、初期値問題の一意可解性がいえる。

命題 2. $H = L^2(\mathbf{T}^N)$ とする。$u_0 \in L^2(\mathbf{T}^N)$ に対して、全変動流方程式 $u_t \in -\partial E(u)$ の初期値問題は、命題1の意味で時間大域的な解をただ一つ持つ。その解の時間右微分 u_t^+ は $-\partial^\circ E(u)$ に等しい。

また第1.2節の例の4階の全変動流方程式を考えよう。平均ゼロの H^{-1} 空間を H とする。つまり $H^1(\mathbf{T}^N)$ の双対空間の元で定数関数の消滅子全体、すなわち

$$H = H_{\mathrm{av}}^{-1} = \left\{f \in H^{-1}(\mathbf{T}^N) \mid \langle f, 1\rangle = 0\right\}$$

とする。4階の全変動流方程式は $u_t \in -\partial_{H_{\mathrm{av}}^{-1}} E(u)$ とみなせ、命題1を用いることができる。すなわち

命題 3. $u_0 \in H_{\mathrm{av}}^{-1}(\mathbf{T}^N)$ に対して、4階全変動流方程式の初期値問題は、命題1の意味で時間大域的な解をただ一つ持つ。その解の時間右微分 u_t^+ は $-\partial^\circ_{H_{\mathrm{av}}^{-1}} E(u)$ に等しい。

ここで $\partial_{H_{\mathrm{av}}^{-1}}$ は H_{av}^{-1} についての劣微分を表す。

勾配流はエネルギーの取り方によるのはもちろんであるが、エネルギーが決まっても劣微分を取る計量（内積）によって大きく異なることに注意したい。命題2については、他の関数空間（L^1 など）を含めての初期値問題の可解性を含めて、単行本 F. Andreu-Vaillo, V. Caselles, J. M. Mazón (2004) に詳述されている。また以下の全変動流エネルギーについての L^2 劣微分についても、その特徴づけが述べられている。4階全変動流方程式とその一般化についての初期値問題の可解性、および劣微分の特徴づけについては、M.-H. Giga, Y. Giga (2010), Y. Giga , R. V. Kohn (2011), Y. Kashima (2004), (2012) による。

命題2の場合の L^2 劣微分を計算すると、滑らかなファセット上の劣微分が求められる。簡単なため $u : \mathbf{T}^N \to \mathbf{R}$ の最小値が m で $U = \left\{ x \in \mathbf{T}^N \mid u(x) = m \right\}$ が滑らかな境界を持つ領域とする。全変動エネルギー E の L^2 劣微分は

$$\partial E(u)|_U = \left\{ \operatorname{div} z \in L^2(\mathbf{T}^N) \mid |z| \le 1 \text{ a.e. in } U,\ z \cdot \nu = 1 \text{ on } \partial U \right\}$$

となる。ただし ν は外向き単位法ベクトルである。これにより、$\partial^\circ E(u)$ の U での値は次の障害物問題の解を求めればわかる。すなわち

$$z_0 = \operatorname{argmin} \left\{ \int_U |\operatorname{div} z|^2 \mathrm{d}x \;\middle|\; |z| \le 1 \text{ a.e. in } U\text{（束縛条件）},\ z \cdot \nu = 1\text{（境界条件）} \right\}$$

と置くと $\partial^\circ E(u)|_U = -\operatorname{div} z_0$ となる。$\operatorname{div} z_0$ が定数であることと、ファセット上の速度が一定であること、すなわち「ファセット維持の仮定」は同値であることが全変動流方程式の場合にいえる。このため、どのようなファセットの場合にファセットが維持されるかが問題になる。

定義 1. u に対して $\operatorname{div} z$ が定数となる束縛条件と境界条件を満たすベクトル場 z が存在するとき、U を**計測可能 (calibrable)** という。（このような z は上述の障害物問題の最小解となっている。）

1次元の任意の区間や、円や球は計測可能であるが、楕円は円に近くないと計測可能でないことが知られている。

u の最小値ではなく最大値を含むファセット（内点を持つ等高面）の場合、障害物問題の境界条件は $z \cdot \nu = -1$ となる。u とは独立に一般閉集合 U を考え、$\chi \in C\left(U^c; \{+1, 1\}\right)$ を考え、U 上 $\chi = 0$ と置く。このとき (U, χ) を単に**ファセット**と呼ぶ。このとき障害物問題の境界条件を $z \cdot \nu = \chi$ と置きかえる。この境界条件が定義できれば、かなり一般の場合に z_0 が定義できる。

定義 2. U の境界が滑らかとする。(U, χ) の障害物問題の最小解 z_0 に対して $\Lambda(\chi) = \operatorname{div} z_0$ を**最小発散**という。（z_0 には任意性があるが、$\operatorname{div} z_0$ はただ一つ決まる。）

定理 1 (M.-H. Giga, Y. Giga, N. Požár (2014))**.** $(\Omega_1, \chi_1), (\Omega_2, \chi_2)$ いずれも境界が滑らかなファセットとする。このとき $\chi_1 \le \chi_2$ ならば $\Lambda(\chi_1) \le \Lambda(\chi_2)$ となる。

関数の最大点で2階微分が非負であることの反映である。証明は、標準制限をレベルベントで近似することにより示される。

$\Lambda(\chi)$ の値であるが、もし U が計測可能で $\chi \geq 0$ ならば $\Lambda(\chi) = |\partial U|/|U|$（チーガー (Cheeger) 商）となる。これは、

$$\Lambda(\chi)|U| = \int_U \operatorname{div} z_0 \,\mathrm{d}x = \int_{\partial U} z_0 \cdot \nu \; d\mathcal{H}^{N-1} = |\partial U|$$

より明らかである。以下 $\chi \geq 0$ のファセットについて、いくつかの性質をまとめる。

定義 3. U が**チーガー集合**であるとは、任意の $D \subset U$ に対してそのチーガー商が U のものより大きいときをいう。

命題 4 (G. Bellettini, V. Caselles, M. Novaga (2002) 2次元滑らかな有界凸領域の場合、F. Alter, V. Caselles, A. Chambolle (2005) 一般周長有限有界凸領域の場合)**.** U がチーガー集合であることと、U が計測可能であることは同値である。それは境界の主曲率の和がチーガー商以下であることとも同値である。

χ が一般の場合については、現在 Požár 氏と研究中である。

この比較定理1をもとに、2階全変動流型方程式についての粘性解理論[†]（最大値原理に基づく広義解の理論）が確立されている。$N = 1$ の場合はファセット維持の仮定が有効であったので、既に M.-H. Giga, Y. Giga (1998) で確立されている。$N \geq 2$ の場合はファセットが計測可能でないため、さまざまな工夫を要する。例えば解の標準的構成法の一つであるペロンの方法は使えない。にもかかわらず、以下の一意存在定理が、比較定理（定理1）と近似により得られる。

定理 2 (M.-H. Giga, Y. Giga, N. Požár (2014))**.** 初期値 $u_0 \in C(\mathbf{T}^N)$ に対して

$$u_t + f\left(\nabla u, \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)\right) = 0$$

を満たす時間大域的に連続な粘性解 u がただ一つ存在する。ただし f は連続で最後の変数について非増加とする。また初期値 u_0 と v_0 に対応する解をそれぞれ u, v とするとき、$u_0 \leq v_0$ ならば $u \leq v$ が従う（比較原理）。特に $\|\nabla u\|_\infty(t) \leq \|\nabla u_0\|_\infty$ がいえる。

第1.2節の冒頭の非発散型の例に適用可能である。この考え方をさらに推し進めることにより、いわゆるクリスタライン曲率流方程式にも粘性解の理論の拡張が可能になった。

定理 3 (Y. Giga, N. Požár ADE (2016), CPAM (2018)[‡])**.** γ を正斉次1次凸関数で区分的に1次とする。このとき初期値 $u_0 \in C(\mathbf{T}^N)$ に対して

$$u_t + |\nabla u| f\left(-\nabla u/|\nabla u|, \operatorname{div}(\nabla_q \gamma)(-\nabla u)\right) = 0$$

を満たす時間大域的に連続な粘性解 u がただ一つ存在する。また比較原理も成立する。

[†]粘性解理論の本格的入門書としては、小池茂昭, 粘性解：比較原理を中心に, 共立出版 (2016) が挙げられる。

[‡]引用論文では $\mathbf{R}^N$ の場合に対して述べられているが、周期境界条件への拡張は容易である。

これは法速度 $V=f\left(\vec{n}, \operatorname{div}_\Gamma\left(\nabla_p\gamma(\vec{n})\right)\right)$ の超曲面 $\{\Gamma_t\}$ の発展方程式の等高面方程式 (Y.-G. Chen, Y. Giga, S. Goto (1991), L. C. Evans, J. Spruck (1991), Y. Giga (2006)) の可解性を示している。$\gamma(q)=|q|$, $f(\vec{n},X)=-X$ の場合は $V=-\operatorname{div}_\Gamma\vec{n}$ となり、平均曲率流方程式にほかならない。ここで $\operatorname{div}_\Gamma$ は曲面の表面発散を表す。この結果によりクリスタライン曲率流方程式の等高面法が確立された。証明の考え方は定理 2 と同様であるが、γ の特異点を面、辺、頂点といった分類をしなければならないし、また滑らかなファセットによる近似にも工夫を要する。

注意　γ が滑らかでないときの曲面の発展方程式 $V=M(\vec{n})\left(-\operatorname{div}_\Gamma\nabla_p\gamma(\vec{n})+c(x,t)\right)$ についての等高面法は距離関数を用いる方法で、最近 A. Chambolle, M. Morini, M. Ponsiglione (2017) および、そのグループに M. Novaga (2018) が加わった研究により確立された。しかし、曲率に対して線形であること、また動的係数 $M>0$ がある意味で凸関数でないと、構造的に適用できない手法である。ただし γ は必ずしも区分的に線形である必要はないところは優れている。

3. 有限時間での消滅問題

$\mathbf{T}^N$ 上での全変動流方程式の解は有限時間で定数に収束し、その後は動かない。初期値 u_0 の $\mathbf{T}^N$ 上での平均をゼロとすると、この性質は保たれる。時刻 $T_*(u_0)$ で解は恒常的にゼロとなり、それは $T_*(u_0)\le S_N\|u_0\|_{L^N}$ と評価される。ここで S_N はソボレフ不等式（等周不等式）$\|f\|_{L^{N(N-1)}}\le S_N\|\nabla f\|_{L^1}$ $(f\in C_c^\infty(\mathbf{R}^N))$ の最良定数である。

実際、$N=2$ のとき方程式の両辺に u をかけて積分すると

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{T}^2}|u|^2\mathrm{d}x=-\int_{\mathbf{T}^2}|\nabla u|$$

で $\left(\int_{\mathbf{T}^2}|u|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\le S_2\int_{\mathbf{T}^2}|\nabla u|$ $(\int_{\mathbf{T}^N}u\mathrm{d}x=0)$ を用いれば $\|u\|_{L^2}(t)\le\|u_0\|_{L^2}-S_2^{-1}t$ を得るのでただちにわかる（$N\ge 3$ の場合は、かける関数として u^{N-1} をとれば同様の評価が得られる）。

同じ問題を 4 階全変動流方程式について考えたものが次の結果である。

定理 4 (Y. Giga, R. V. Kohn (2011))**.** 初期値 $u_0\in H_{\mathrm{av}}^{-1}$ に対して、第 1.2 節の 4 階の全変動流方程式またはその一般化を考える。$N=4$ のとき $T_*(u_0)\le C\|u_0\|_{H^{-1}}$ となる。ただし C は $\mathbf{T}^N$ の拡大・縮小によらない。一般に $1\le N\le 4$ のとき $1\le p\le\infty$, $\theta\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ を

$$1+\frac{N}{2}=\theta(N-1)+(1-\theta)\left(3+\frac{N}{p}\right)$$

となるようにする。このとき

$$T_*(u_0)\le\frac{\|(-\Delta)^{-1}u_0\|_{\dot{W}^{-1,p}}}{a}\left(\left(1+\frac{a\|u_0\|_{H^{-1}}^\alpha}{C_*\|(-\Delta)^{-1}u_0\|_{\dot{W}^{-1,p}}^\alpha}\right)^{1/\alpha}-1\right)$$

が成立する。ただし、$a=|\mathbf{T}^N|^{1/p}$, $\alpha=2-1/\theta$ とする。ここで C_* は u_0 や $\mathbf{T}^N$ の拡大・縮小によらない定数である。また $|\mathbf{T}^N|=\omega_1\cdots\omega_N$,

$$\|f\|_{\dot{W}^{-1,p}}=\sup\left\{\int_{\mathbf{T}^N}f\varphi\,\mathrm{d}x\;\middle|\;\varphi\in C_c^\infty(\mathbf{T}^N),\ \|\nabla\varphi\|_{L^{p'}}\le 1\right\},\quad 1/p+1/p'=1$$

と定義している。

証明の考え方. 方程式 $u_t = (-\Delta)\operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|)$ の両辺に $(-\Delta)^{-1}u$ をかけて積分すると

$$\langle u, v\rangle_{H^{-1}} = \langle (-\Delta)^{-1}u, v\rangle_{L^2}$$

なので

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H^{-1}}^2 = -\int_{\mathbf{T}^N} |\nabla u|$$

となる。$N=4$（かつ $\theta=1$）の場合はソボレフの不等式とカルデロン・ジグムントの不等式により

$$\|u\|_{H^{-1}} = \left\|(-\Delta)^{-1/2}u\right\|_{L^2} \le A' \left\|\nabla(-\Delta)^{-1/2}u\right\|_{L^p} \le A_p\|u\|_{L^p}, \quad 1/2 = 1/p - 1/4$$

となるので、ソボレフの不等式より $\|u\|_{H^{-1}} \le A_{4/3}S_4 \int_{\mathbf{T}^N} |\nabla u|$ となり、2 階のときと同様に $T_*(u_0)$ の評価 $T_*(u_0) \le C\|u_0\|_{H^{-1}}$ が $C = A_{4/3}S_4$ として得られる。

より複雑な場合は次の補間不等式

$$\|u\|_{H^{-1}} \le C_* \left\|(-\Delta)^{-1}u\right\|_{\dot{W}^{-1,p}}^{1-\theta} \left(\int |\nabla u|\right)^{\theta}$$

を用いる。そのうえで解の $\|(-\Delta)^{-1}u\|_{\dot{W}^{-1,p}}$ の弱いノルムの増大度評価

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|(-\Delta)^{-1}u\right\|_{\dot{W}^{-1,p}} \le |\mathbf{T}^N|^{1/p}$$

を用いればよい。詳しくは、Y. Giga, R. V. Kohn (2011) およびY. Giga, H. Kuroda, H. Matsuoka (2016) を参照のこと。エネルギーの消散、補間不等式、弱いノルムの増大評価はR. V. Kohn, F. Otto (2002) の粗視化理論にも用いられている。なお、Dirichlet 問題等への一般化は、Y. Giga, H. Kuroda, H. Matsuoka (2016) によるが、ここではこれ以上述べない。 □

$N \ge 5$ では有限時間で消滅するかはわかっていない。また、4 階全変動流方程式については 2 階と異なり、初期値の Lipschitz 性は保たれず、一瞬のうちに不連続となりうる (M.-H. Giga, Y. Giga (2010))。

4. その他の話題

全変動写像流について、近年研究が進んできている。ジャンプが起きない範囲の小さい局所解の存在は、Y. Giga, Y. Kashima, N. Yamazaki (2004) の研究で始まったが、最近、大幅に改良された (L. Giacomelli, M. Łasica, S. Moll (2017))。この解は調和写像流と同様、有限時間で微分が爆発しうる (Y. Giga, H. Kuroda (2004) R. Dal Passo, L. Giacomelli, S. Moll (2008), L. Giacomelli, S. Moll (2010))。区分定数の解（定義域 1 次元）の場合はY. Giga, R. Kobayashi (2005) で構成されている。ただし、ジャンプは外的距離（$\mathbf{R}^m$ の距離）で測られている。高次元の場合は、空間離散問題の解は必ずしも元の問題の解ではないが、その一意可解性がK. Taguchi (2018) により示された。

一方、M の測地距離での弱解の構成も研究されている。例えばL. Giacomelli, J. Mazón, S. Moll (2013), (2014) により S^1 値の場合の一意存在性、半球面 $(S^{m-1})_+$ での存在性が示されている。またL. Giacomelli, M. Łasica, S. Moll (2019), (準備中) により 1 次元領域での BV 解の一意性が示されている。一方、区分定数空間離散問題の

場合の時空間離散スキームとして有用とみられる計算法が、Y. Giga, K. Taguchi, K. Sakakibara, M. Uesaka (2018) により与えられ、スキームの収束速度も評価されている。

さて、有限時間での解の消滅問題は、言い方を変えると、有限時間で定常解に収束するかどうかという問題ともみなせる。全変動写像流のように束縛条件のある場合は一般には成立しないことが、ディリクレ問題の場合知られている (Y. Giga, H. Kuroda (2015))。一方、ジャンプが小さければ有限時間で定常解に収束することが、最近になって示された (L. Giacomelli, M. Łasica, S. Moll (準備中))。

本稿では境界値問題について触れなかったが、全変動流方程式についてはF. Andreu-Vaillo らの著書 (2004) で、ディリクレ問題、ノイマン問題が詳述されている。最近、動的境界値問題についても、Y. Giga, R. Nakayashiki, P. Rybka, K. Shirakawa (準備中) によって、特にファセットの動きについて研究されている。なお、動的境界条件は、Cahn-Hilliard 方程式系でしばしば用いられている。

以上、全変動流型方程式に対して、その基礎からいくつかの話題について述べたが、決して網羅的なものではない。

参考文献

[1] Alter, F.; Caselles, V.; Chambolle, A. A characterization of convex calibrable sets in $\mathbb{R}^N$. *Math. Ann.* 332 (2005), 329–366.

[2] Andreu-Vaillo, F.; Caselles, V.; Mazón, José M. Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals. Progress in Mathematics, 223. *Birkhäuser Verlag, Basel,* 2004. xiv+340 pp.

[3] Bellettini, G.; Caselles, V.; Novaga, M. The total variation flow in $\mathbb{R}^N$. *J. Differential Equations* 184 (2002), 475–525.

[4] Brézis, H. Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50). *North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York,* 1973.

[5] Chambolle, A.; Morini, M.; Ponsiglione, M. Existence and uniqueness for a crystalline mean curvature flow. *Comm. Pure Appl. Math.* 70 (2017), 1084–1114.

[6] Chambolle, A.; Morini, M.; Novaga, M.; Ponsiglione, M. Generalized crystalline evolutions as limits of flows with smooth anisotropies. *Anal. PDE* 12 (2019), 789–813.

[7] Chen, Y.-G.; Giga, Y.; Goto, S. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geom.* 33 (1991), 749–786.

[8] Dal Passo, R.; Giacomelli, L.; Moll, S. Rotationally symmetric 1-harmonic maps from D^2 to S^2. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 32 (2008), 533–554.

[9] Evans, L. C.; Spruck, J. Motion of level sets by mean curvature. *J. Differential Geom.* 33 (1991), 635–681.

[10] Giacomelli, L.; Łasica, M. A local estimate for vectorial total variation minimization in one dimension. *Nonlinear Anal.* 181 (2019), 141–146.

[11] Giacomelli, L.; Łasica, M.; Moll, S. Regular 1-harmonic flow. preprint (2017).

[12] Giacomelli, L.; Mazón, J. M.; Moll, S. The 1-harmonic flow with values into $\mathbb{S}^1$. *SIAM J. Math. Anal.* 45 (2013), 1723–1740.

[13] Giacomelli, L.; Mazón, J. M.; Moll, S. The 1-harmonic flow with values in a hyperoctant of the N-sphere. *Anal. PDE* 7 (2014), 627–671.

[14] Giacomelli, L.; Moll, S. Rotationally symmetric 1-harmonic flows from D^2 to S^2: local well-posedness and finite time blowup. *SIAM J. Math. Anal.* 42 (2010), 2791–2817.

[15] Giga, M.-H.; Giga, Y. Evolving graphs by singular weighted curvature. *Arch. Rational Mech. Anal.* 141 (1998), 117–198.

[16] Giga, M.-H.; Giga, Y. Very singular diffusion equations: second and fourth order problems. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* 27 (2010), 323–345.

[17] Giga, M.-H.; Giga, Y.; Požár, N. Periodic total variation flow of non-divergence type in $\mathbb{R}^n$. *J. Math. Pures Appl. (9)* 102 (2014), 203–233.

[18] Giga, Y. Surface evolution equations. A level set approach. Monographs in Mathematics, 99. *Birkhäuser Verlag, Basel,* 2006. xii+264 pp. 入門書：儀我美一, 陳蘊剛. 動く曲面を追いかけて. 日本評論社 (1996), 新版 (2015).

[19] Giga, Y.; Kashima, Y.; Yamazaki, N. Local solvability of a constrained gradient system of total variation. *Abstr. Appl. Anal.* 8 (2004), 651–682.

[20] Giga, Y.; Kobayashi, R. On constrained equations with singular diffusivity. *Methods Appl. Anal.* 10 (2003), 253–277.

[21] Giga, Y.; Kohn, R. Scale-invariant extinction time estimates for some singular diffusion equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 30 (2011), 509–535.

[22] Giga, Y.; Kuroda, H. A counterexample to finite time stopping property for one-harmonic map flow. *Commun. Pure Appl. Anal.* 14 (2015), 121–125.

[23] Giga, Y.; Kuroda, H. On breakdown of solutions of a constrained gradient system of total variation. *Bol. Soc. Parana. Mat. (3)* 22 (2004), 9–20.

[24] Giga, Y.; Kuroda, H.; Matsuoka, H. Fourth-order total variation flow with Dirichlet condition: characterization of evolution and extinction time estimates. *Adv. Math. Sci. Appl.* 24 (2014), 499–534.

[25] Giga, Y.; Taguchi, K.; Sakakibara, K; Uesaka, M. A new numerical scheme for constrained total variation flows and its convergence. preprint (2018).

[26] Giga, Y.; Požár, N. A level set crystalline mean curvature flow of surfaces. *Adv. Differential Equations* 21 (2016), 631–698.

[27] Giga, Y.; Požár, N. Approximation of general facets by regular facets with respect to anisotropic total variation energies and its application to crystalline mean curvature flow. *Comm. Pure Appl. Math.* 71 (2018), 1461–1491.

[28] Kashima, Y. A subdifferential formulation of fourth order singular diffusion equations. *Adv. Math. Sci. Appl.* 14 (2004), 49–74.

[29] Kashima, Y. Characterization of subdifferentials of a singular convex functional in Sobolev spaces of order minus one. *J. Funct. Anal.* 262 (2012), 2833–2860.

[30] Kohn, R. V.; Otto, F. Upper bounds on coarsening rates. *Comm. Math. Phys.* 229 (2002), 375–395.

[31] Kōmura, Y. Nonlinear semi-groups in Hilbert space. *J. Math. Soc. Japan* 19 (1967), 493–507. 解説書：高村幸男, 小西芳雄. 非線型発展方程式. 岩波書店 (1977).

[32] Rudin, L. I.; Osher, S.; Fatemi, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Experimental mathematics: computational issues in nonlinear science (Los Alamos, NM, 1991). *Phys. D* 60 (1992), 259–268.

[33] Spohn, H. Surface dynamics below the roughening transition. *J. Phys. I France* 3 (1993), 69–81.

[34] Taguchi, K. On discrete one-harmonic map flows with values into an embedded manifold on a multi-dimensional domain. *Adv. Math. Sci. Appl.* 27 (2018), 81–113.

[35] Tang, B.; Sapiro, G.; Caselles, V. Diffusion of general data on non-flat manifolds via harmonic maps theory: the direction diffusion case. *Int. J. Comput. Vis.* 36 (2000), 149–161.